三角形面积公式的由来和演变

饶克勇

(昭通师范高等专科学校 数学系，　云南　昭通　657000)

[摘　要]　系统揭示三角形面积公式的由来、演变及应用.

[关键词]　三角形;　面积;　公式

[中图分类号]O123. 6　　[文献标识码]A　　[文章编号]1008-9322(2003)05-0021-06

Triangular Area Formulas' Orign and Evolution

RAO Ke-yong

(Department of Mathematics, Zhaotong Teacher's College, Zhaotong 657000, China)

Abstract: Bring to light triangular area formulas' orign, evolution and use systematically.

Key words: triangle; area; formula

三角形是平面几何中最简单的基本图形，在后继学习及日常生活中有广泛的应用．中小学生对于三角形面积公式是熟悉的，并能用公式计算三角形的面积；但对于日常生活中有关面积的测算却时常会感到束手无策．其原因之一是对三角形面积公式的由来及演变并不清楚，对其中所含的数学思想认识不足．

数学课本在表述人类积累起来的成果时，为了课堂上便于传授知识，采用严谨、简洁的手法表述数学知识．而这些知识的来龙去脉就需要教师在备课时进行充分的思考，在上课时用科学思维方法引导学生进行探索、分析、研究，使他们重新"发现"这些知识，形成数学观念．只有如此，才能促进学生思维的发展、能力的培养和素质的提高．

1　三角形面积公式的由来

人们认识事物总是遵循从特殊到一般的认识规律．矩形是生活中常见并且应用广泛的简单图形，它的面积等于底×高，由矩形面积公式可推导出其他图形的面积公式．

首先推导直角三角形的面积公式．设直角三角形两条直角边分别长 a, b，两个这样的三角形可以完整拼合为一个长和宽分别为 a, b 的矩形．换言之，一个矩形可以通过一条对角线分解为两个全等的直角三角形．由此得到直角三角形面积公式：

$$S_{\mathrm{Rt}\triangle ACB} = \frac{1}{2}AC \cdot BC.$$

对于一般的三角形，可以通过一边上的高把它变成两个直角三角形的和或差．如图 1．由直角三角

收稿日期：2003-05-01
作者简介：饶克勇(1939—　)，男，云南昭通人，教授，主要研究初等数学．

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

形面积公式，可求出一般三角形的面积为$\frac{1}{2}$底×高 记$\triangle ABC$三角A，B，C所对边为a, b, c，三边上的高分别为h_a, h_b, h_c. 即有：

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c \tag{1}$$

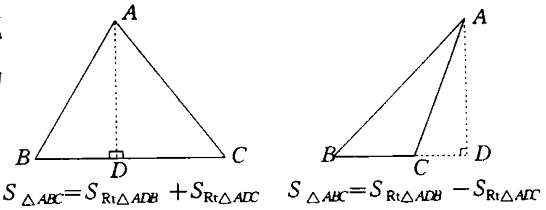

图1　三角形化为两个直角三角形之和或差

2　三角形面积公式的演变

根据三角形中边与角之间的函数关系$h_a=c\sin B=b\sin C$，**代入公式**(1)，**得**：

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B. \tag{2}$$

由正弦定理$b=a\frac{\sin B}{\sin A}$，**代入**(2)，**得**：

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin(C+A)}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}. \tag{3}$$

由于$\sin(A+B)=\sin C$，**上式亦即**

$$S=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin B}=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}. \tag{4}$$

设三角形外接圆半径为R，**由正弦定理**$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，**代入**(2)，**得**

$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C. \tag{5}$$

将$c=h_a/\sin B$，$b=h_a/\sin C$ **代入公式**(2)，**得**

$$S=\frac{h_a^2\sin A}{2\sin B\sin C}=\frac{h_b^2\sin B}{2\sin C\sin A}=\frac{h_c^2\sin C}{2\sin A\sin B}. \tag{6}$$

由正弦定理$\sin A=a/2R$，$\sin B=b/2R$，$\sin C=c/2R$，**代入**(5)，**得**

$$S=abc/4R. \tag{7}$$

将$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ **代入**(5)，**可得**

$$S=\frac{a^2\sin 2B+b^2\sin 2A}{4}=\frac{b^2\sin 2C+c^2\sin 2B}{4}=\frac{c^2\sin 2A+a^2\sin 2C}{4}. \tag{8}$$

由公式(5)**还可得到如下公式**：

$$S=\frac{(a^2-b^2)\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}=\frac{(b^2-c^2)\sin B\sin C}{2\sin(B-C)}=\frac{(c^2-a^2)\sin C\sin A}{2\sin(C-A)}; \tag{9}$$

$$S=\frac{2abc}{a+b+c}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}; \tag{10}$$

$$S=\left(\frac{a^2}{\sin A}+\frac{b^2}{\sin B}+\frac{c^2}{\sin C}\right)\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}. \tag{11}$$

证明　(9)：

$$S=2R^2\sin A\sin B\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin(A+B)=$$

$$4R^2\sin A\sin B\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}=$$

$$2R^2\sin A\sin B\frac{\left(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)\left(2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\right)}{2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=$$

$$\frac{2R^2(\sin A+\sin B)(\sin A-\sin B)\sin A\sin B}{\sin(A-B)}=\frac{4R^2(\sin^2A-\sin^2B)\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}=$$

$$\frac{(a^2-b^2)\sin A\sin B}{2\sin(A-B)}.$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

(10):　　右端 $= \dfrac{16R^3\sin A\sin B\sin C}{2R(\sin A+\sin B+\sin C)}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}=$

$$\frac{16R^3\sin A\sin B\sin C}{8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=2R^2\sin A\sin B\sin C=\text{左端}$$

(11):　　右端 $=4R^2(\sin A+\sin B+\sin C)\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=$

$$4R^2\cdot 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=2R^2\sin A\sin B\sin C=\text{左端}$$

由(2)式两边平方, 得

$$S^2=\frac{1}{4}a^2b^2\sin^2C=\frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2C),$$

由余弦定理知, $\cos C=(a^2+b^2-c^2)/2ab$, 代入上式, 得

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}. \tag{12}$$

(12) 式称为秦九韶三斜求积公式

将 $S^2=\dfrac{1}{4}a^2b^2(1-\cos^2C)$ 变形为 $S^2=\dfrac{1}{4}a^2b^2(1+\cos C)(1-\cos C)$, 再应用余弦定理, 得

$$S^2=\frac{1}{16}(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)=\frac{1}{16}[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]$$

应用平方差公式, 再令 $p=\dfrac{a+b+c}{2}$ (半周长, 下同), 即得著名的海伦公式:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \tag{13}$$

若已知三角形内切圆半径为 r, 由图 2 知,

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COA}=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br=$$

$$\frac{1}{2}(a+b+c)r=pr,$$

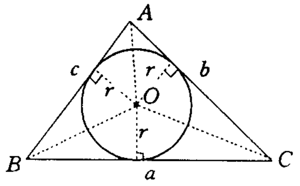

图2　$S=pr$ 的证明

即

$$S=pr. \tag{14}$$

将正弦定理 $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$ 代入(14) 式, 可得

$$S=4Rr\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \tag{15}$$

由半角定理: $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{r}{p-a}$, 代入(14) 式, 得

$$S=p(p-a)\tan\frac{A}{2}=p(p-b)\tan\frac{B}{2}=p(p-c)\tan\frac{C}{2}. \tag{16}$$

由(16)式和(13)式, 可得

$$S=p^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}. \tag{17}$$

若已知三角形一角 A 及其对边 a, 以及该边上的中线长 m_a, 则可由下式计算三角形面积:

$$S=\frac{(2m_a+a)(2m_a-a)}{8}\tan A=\frac{(2m_b+b)(2m_b-b)}{8}\tan B=\frac{(2m_c+c)(2m_c-c)}{8}\tan C. \tag{18}$$

证明　因 $m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$, 故 $(2m_a+a)(2m_a-a)=2(b^2+c^2-a^2)=4bc\cos A$, 即 $\dfrac{1}{8}(2m_a+a)(2m_a-a)\tan A=\dfrac{1}{2}bc\sin A=S$.

设 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的平分线分别长 t_a, t_b, t_c, 由 $t_a=\dfrac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$ 和(13) 式, 易证:

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$S=\frac{b+c}{2\sqrt{bc}}\sqrt{(p-b)(p-c)}\,t_a=\frac{c+a}{2\sqrt{ca}}\sqrt{(p-c)(p-a)}\,t_b=\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\sqrt{(p-a)(p-b)}\,t_c;\tag{19}$$

$$S=\frac{t_at_bt_c(a+b)(b+c)(c+a)}{abcp}.\tag{20}$$

设 $\triangle ABC$ **的** $\angle A,\angle B,\angle C$ **的外角平分线分别长** t'_a, t'_b, t'_c, **由** $t'_a=\frac{2\sqrt{bc(p-b)(p-c)}}{|b-c|}$, **易证:**

$$S=\frac{|b-c|}{2\sqrt{bc}}\sqrt{p(p-a)}\,t'_a=\frac{|c-a|}{2\sqrt{ca}}\sqrt{p(p-b)}\,t'_b=\frac{|a-b|}{2\sqrt{ab}}\sqrt{p(p-c)}\,t'_c\tag{21}$$

由(13)、(19) **和**(21) **可得:**

$$S=\frac{|b^2-c^2|}{4bc}t_at'_a=\frac{|c^2-a^2|}{4ca}t_bt'_b=\frac{|a^2-b^2|}{4ab}t_ct'_c\tag{22}$$

设 $\triangle ABC$ **的** $\angle A,\angle B,\angle C$ **所对的旁切圆半径分别为** r_a, r_b, r_c, **内切圆半径为** r, **则有**

$$S=rr_a\cot\frac{A}{2}=rr_b\cot\frac{B}{2}=rr_c\cot\frac{C}{2};\tag{23}$$

$$S=\sqrt{rr_ar_br_c};\tag{24}$$

$$S=\frac{r_ar_br_c}{\sqrt{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}}.\tag{25}$$

证明　因为

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},\quad r_a=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$r_b=4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},\quad r_c=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

故

$$rr_a\cot\frac{A}{2}=16R^2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2R^2\sin A\sin B\sin C=S.$$

$$\sqrt{rr_ar_br_c}=2R^2\sin A\sin B\sin C=S.$$

因

$$r_ar_b+r_br_c+r_cr_a=4R^2\left(\sin A\sin B\cos^2\frac{C}{2}+\sin B\sin C\cos^2\frac{A}{2}+\sin A\sin C\cos^2\frac{B}{2}\right)=$$

$$ab\cos^2\frac{C}{2}+bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\left(ab(1+\cos C)+bc(1+\cos A)+ca(1+\cos B)\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left((ab+bc+ca)+(ab\cos C+bc\cos A+ca\cos B)\right)=$$

$$\frac{ab+bc+ca}{2}+\frac{a^2+b^2-c^2+b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2}{4}=\frac{(a+b+c)^2}{4}=p^2.$$

故

$$\frac{r_ar_br_c}{\sqrt{r_ar_b+r_br_c+r_cr_a}}=\frac{S^2/r}{p}=S.$$

若 $\triangle ABC$ **在平面直角坐标系三个顶点坐标分别为** $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, **则其面积** S **为**

$$S=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}\right|.\tag{26}$$

证明　　因直线 BC **的方程为**

$$(y_2-y_3)x-(x_2-x_3)y+(x_2y_3-x_3y_2)=0,$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

故点 A 到 BC 的距离为

$$h = \frac{\left|(y_2 - y_3)x_1 - (x_2 - x_3)y_1 + (x_2y_3 - x_3y_2)\right|}{\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}}.$$

又
$$|BC| = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2},$$

故
$$S = \frac{1}{2}h \cdot |BC| = \frac{1}{2}\left|(y_2 - y_3)x_1 - (x_2 - x_3)y_1 + (x_2y_3 - x_3y_2)\right| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

3 三角形面积公式的应用

通过以上分析可见, 直角三角形面积公式可由矩形面积公式得到, 求一般三角形面积是把它变成两个直角三角形之和或差 这一方法也就是求任意平面图形面积的方法 所有的平面封闭图形的面积都可化成若干个矩形面积与若干个三角形面积的和或差 只要分得足够细, 就可求得足够精度的图形面积 如果分成无穷多个并采用求极限的方法, 就能求出圆形、椭圆形、曲边三角形、曲边梯形等各种图形的精确面积

三角形面积公式不仅在测算图形面积时有着广泛的应用, 还能用于其他方面 以下举例说明

例 1 证明三角形的外心、重心、垂心三点共线

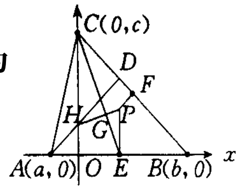

图3 例1示意图

证明 在如图 3 的坐标系中, 设 $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(0, c)$, P, G, H 分别为 $\triangle ABC$ 的外心、重心和垂心. AD 为 BC 边上的高, E, F 分别为 AB, BC 边上的中点 由中点坐标公式可求出 $E(\frac{a+b}{2}, 0)$, $F(\frac{b}{2}, \frac{c}{2})$.

CH 的方程是 $x = 0$, AD 的方程是 $y = \frac{b}{c}(x - a)$.

解方程组 $\begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{b}{c}(x - a) \end{cases}$ 得 H 点坐标为 $H(0, -\frac{ab}{c})$.

PE 的方程是 $x = \frac{a+b}{2}$, PF 的方程是 $y - \frac{c}{2} = \frac{b}{c}(x - \frac{b}{2})$.

解这两个方程组成的方程组, 得 P 点坐标为 $P(\frac{a+b}{2}, \frac{ab+c^2}{2c})$.

重心 G 的坐标为 $G(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3})$.

故 $\triangle PGH$ 的面积 S 为

$$1S = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & -\frac{ab}{c} & 1 \\ \frac{a+b}{2} & \frac{ab+c^2}{2c} & 1 \\ \frac{a+b}{3} & \frac{c}{3} & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{ab}{2} \cdot \frac{a+b}{6} + \frac{a+b}{6} \cdot \left(-\frac{ab}{c}\right)\right| = 0.$$

故 P, G, H 三点共线 即三角形的外心、重心、垂心三点共线

例 2 已知正数 x, y, z 满足方程组

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2/3 = 25, \\ y^2/3 + z^2 = 9, \\ z^2 + xz + x^2 = 16 \end{cases}$$

求 $xy + 2yz + 3xz$ 的值

解: 原方程组化为

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases} x^2 + (y/\sqrt{3})^2 - 2x(y/\sqrt{3})\cos 150° = 5^2, \\ z^2 + (y/\sqrt{3})^2 - 2z(y/\sqrt{3})\cos 90° = 3^2, \\ z^2 + x^2 - 2zx\cos 120° = 4^2. \end{cases}$$

作 Rt△ABC 使 $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 5$, 如图 4.

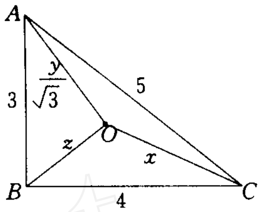

图4　例2示意图

在 △ABC 内取一点 O, 使 $\angle AOB = 90°$, $\angle BOC = 120°$, $\angle COA = 150°$.

由方程组知 $x = CO$, $y = \sqrt{3}AO$, $z = BO$.

而 $S_{\triangle ABC} = 6$, $S_{\triangle AOB} = \frac{\sqrt{3}}{6}yz$, $S_{\triangle BOC} = \frac{\sqrt{3}}{4}xz$, $S_{\triangle AOC} = \frac{\sqrt{3}}{12}xy$.

因 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC}$,

故 $xy + 2yz + 3zx = 24\sqrt{3}$.

例 3　证明勾股定理的逆定理: 在 △ABC 中, 若 $a^2 + b^2 = c^2$, 则 $\angle C$ 为直角.

证明　由 $a^2 + b^2 = c^2$ 得 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, 连同 $p = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$ 代入海伦公式, 化简得 $S = \frac{1}{2}ab$. 又因 $S = \frac{1}{2}ab\sin C$, 故 $\sin C = 1$, 即 $\angle C$ 为直角.

例 4　证明三角形的角平分线性质定理: AD 是 △ABC 中 $\angle A$ 的平分线, 则 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

证明　由于 △ABD 的 BD 边上的高等于 △ADC 的 DC 边上的高, 由公式(1) 知 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{BD}{CD}$;

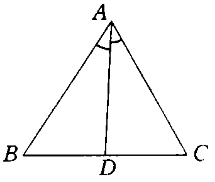

图5　例4示意图

又因为 $\angle BAD = \angle DAC$, 由公式(2) 知 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{AB}{AC}$.

故 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.

例 5　设 O 为 △ABC 内任意一点, 连接 AO, BO, C 并延长分别交 BC, CA, AB 于点 D, E, F, 求 $\frac{OD}{AD} \cdot \frac{OE}{BE} \cdot \frac{OE}{CF}$ 的最大值.

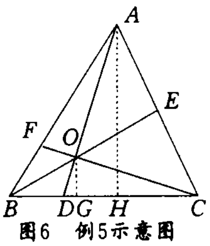

图6　例5示意图

解: 作 $OG \perp BC$ 于 G, $AH \perp BC$ 于 H, 则 $OG \parallel AH$.

由此得: $\frac{OD}{AD} = \frac{OG}{AH} = \frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABC}}$.

同理, 有: $\frac{OE}{BE} = \frac{S_{\triangle COA}}{S_{\triangle ABC}}$, $\frac{OE}{CF} = \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle ABC}}$.

故 $\frac{OD}{AD} \cdot \frac{OE}{BE} \cdot \frac{OE}{CF} = \frac{S_{\triangle BOC} \cdot S_{\triangle COA} \cdot S_{\triangle AOB}}{S^3_{\triangle ABC}} \leq \frac{[(S_{\triangle BOC} + S_{\triangle COA} + S_{\triangle AOB})/3]^3}{S^3_{\triangle ABC}} = \frac{1}{27}$

参考文献:

[1]欧阳维城, 唐德论, 曾岳生. 中学数学方法的综合运用[M]. 长沙: 湖南教育出版社, 1981.
[2]王占聪. 中学数学中的数与形[M]. 合肥: 安徽科学技术出版社, 1984.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net